

Math IA

이승준

February 28, 2026

Contents

1	서론	3
2	연구 설계	3
3	직육면체의 최적화	3
3.1	제약조건을 이용한 변수 제거	4
3.2	극댓값에서 $a = b$ 인 이유	5
3.3	최대 부피와 a, b, c 의 비율	5
3.4	해석 및 다음 단계	6
4	정다각형 기둥의 최적화	7
4.1	제약조건을 이용한 변수 제거	9
4.2	$n = n_0$ 에서의 a 에 대한 최적 조건	9

1 서론

본 연구는 3D 프린터로 정해진 필라멘트 양으로 최대한의 부피를 가진 컨테이너를 구하는 것에 대해 탐구한다. 본 저자는 평소 모델링이나 3D 프린팅에 관심이 많아 필요한 제품이 있을때 직접 디자인하여 출력하는 것을 좋아한다. 최근에는 로봇 개발을 위해 대량의 나사와 너트를 주문했다. 다양한 종류의 부품들이 비닐봉투에 담겨 왔다. 이들을 분류하여 정리하여 필요할때에 사용하기 위해 부품 종류별로 컨테이너를 만들기로 했다. 컨테이너를 디자인하는 것은 매우 쉽다. 그러나 적은 필라멘트로 최대 부피를 가진 컨테이너를 만들 수 있는 방안에 대해서는 생각해 보지 않았다. 3D 프린팅을 자주하고 모델링이나 출력에 문제가 있는 경우 다시 출력해야하기 때문에 평소 필라멘트를 낭비하는 경우가 많았다. 이때문에 필라멘트를 자주 구매해야하기도 했으며, 환경에도 좋지 않았다. 따라서 정해진 필라멘트 양으로 최대 부피를 가진 컨테이너를 구하게 되었다.

2 연구 설계

본 저자가 원하는 컨테이너는 윗면이 없는 기둥이다.

해당 컨테이너를 만들때 사용할 수 있는 필라멘트의 양을 제한한다.

이때 속이 빈 컨테이너를 출력할때 필요한 필라멘트의 양은 컨테이너의 겉넓이와 비례한다. 벽의 두께는 무시한다.

그렇다면 고정된 필라멘트 양으로 제작할 수 있는 최대 부피의 컨테이너를 구하는 것은, 고정된 겉넓이를 가진 최대 부피의 컨테이너를 구하는 것과 같다.

우선 밑면이 직사각형인 기둥인 직육면체에 대해서 최대 부피를 탐구해본 뒤, 밑면이 정다각형인 기둥에 대해서도 탐구하여 어떤 밑면이 어떤 도형일때 부피가 최대가 되는지 탐구한다.

겉넓이는 k 라는 상수로 고정한다.

3 직육면체의 최적화

직육면체(윗면 없음)의 가로, 세로, 높이를 각각 a , b , c 로 둔다. (이들은 모두 길이 이므로 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ 이다.) 그림 1은 해당 직육면체를 나타내며, 길이 비율은 실제 해와 무관하다.

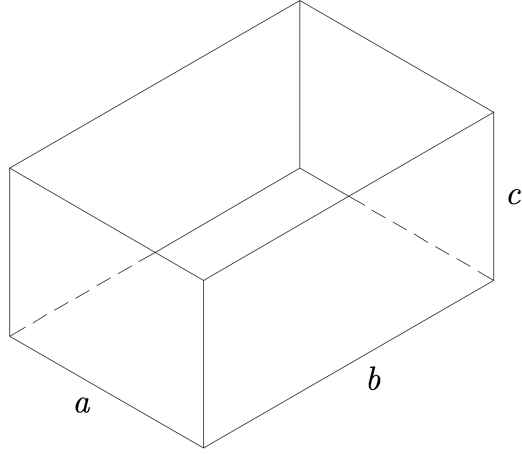


Figure 1: 윗면이 없는 직육면체

본 연구에서는 사용할 수 있는 필라멘트 양이 고정되어 있으므로(두께 무시), 컨테이너의 겉넓이를 상수 k 로 고정한다.

윗면이 없으므로 겉넓이는 바닥 ab 와 네 옆면 $2bc + 2ca$ 의 합이다:

$$S(a, b, c) = ab + 2bc + 2ca \quad (1)$$

따라서 제약조건은

$$S(a, b, c) = k \iff ab + 2c(a + b) = k \quad (2)$$

이다. 한편 부피는

$$V(a, b, c) = abc \quad (3)$$

이다.

3.1 제약조건을 이용한 변수 제거

밑면의 넓이를 p 라 두면 $p = ab$ 이다. 식 2는

$$p + 2c(a + b) = k \quad (4)$$

이 되며, 이를 c 에 대해 풀면

$$c = \frac{k - p}{2(a + b)} \quad (5)$$

이다. 따라서 부피는

$$V(a, b) = ab \cdot c = p \cdot \frac{k - p}{2(a + b)} \quad (6)$$

로 쓸 수 있다.

3.2 극댓값에서 $a = b$ 인 이유

이제 어떤 후보 (a, b, c) 가 부피를 최대로 만드는 최적해라고 가정하자. 그 후보에서의 밑면 넓이 $p = ab$ 는 어떤 특정한 값 p_0 를 갖는다. 이때 p 가 동일한 다른 직사각형들(즉 $ab = p_0$ 인 다른 (a, b))과 비교해도, 최적해라면 부피가 가장 커야 한다.

식 6에서 k 와 p 가 고정되면,

$$V(a, b) = p \cdot \frac{k - p}{2(a + b)}$$

이므로, V 를 크게 만들기 위해서는 분모의 $(a + b)$ 가 최소가 되어야 한다. 그런데 $ab = p$ 가 고정일때 산술기하 평균에 의해

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{p} \quad (7)$$

가 성립하고, 등호는 $a = b$ 일 때에만 성립한다. 따라서 $ab = p$ 인 후보들 중 $(a + b)$ 가 최소가 되는 경우는 $a = b$ 이며, 결국 최적해는 반드시

$$a = b \quad (8)$$

를 만족해야한다.

3.3 최대 부피와 a, b, c 의 비율

이제 b 를 a 로 두면, $p = ab = a^2$ 이고, 식 6을 정리하면 부피는

$$V(a) = p \cdot \frac{k - p}{2(a + b)} = \frac{ka - a^3}{4} \quad (9)$$

가 된다.

최댓값이 되는 지점에서 도함수의 값이 0이어야 하기에, $V'(a) = 0$ 을 풀면,

$$V'(a) = \frac{1}{4}(k - 3a^2) = 0 \implies a = \sqrt{\frac{k}{3}} \quad (10)$$

이 된다.

또한 $V''(a) = -\frac{6}{4}a$ 에서 $a > 0$ 이기 때문에 $V''(a) < 0$ 이 항상 성립한다. 따라서 그림 2에서도 볼 수 있듯이 $a < \sqrt{\frac{k}{3}}$ 일때는 $f'(a) > 0$ 임으로 $f(a)$ 가 증가하며,

$a > \sqrt{\frac{k}{3}}$ 일때는 $f'(a) < 0$ 임으로 $f(a)$ 가 감소하기 때문에, $a = \sqrt{\frac{k}{3}}$ 인 지점이 $f(a)$ 의 최댓값임을 알 수 있다.

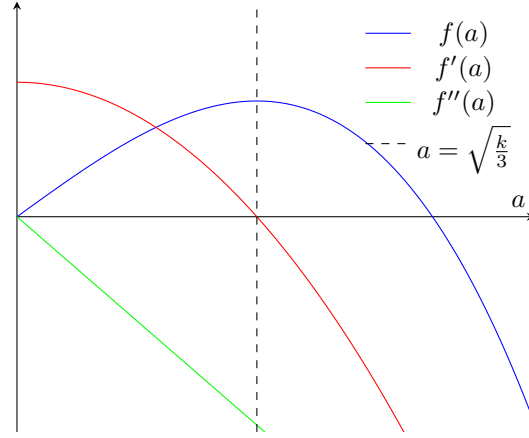


Figure 2: 함수 $f(a)$ 와 도함수 및 이계도함수 그래프

도출한 a 값을 식 5에 대입하면,

$$c = \frac{k-p}{2(a+b)} = \frac{k - \left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right)^2}{4\sqrt{\frac{k}{3}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{3}} = \frac{1}{2}a \quad (11)$$

이 된다. 따라서 최적 비율은

$$\boxed{a = b = 2c} \quad (12)$$

이다.

마지막으로 최대 부피는

$$V_{\max} = abc = a^2c = \left(\frac{k}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{3}}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{3}\right)^{3/2}. \quad (13)$$

이 된다.

3.4 해석 및 다음 단계

직육면체의 부피가 최대가 될때 $a = b$ 이므로 밑면은 정사각형이 된다. 이를 바탕으로 밑면이 정 n 각형인 기둥으로 확장하여, 변의 수 n 이 증가할수록 최대 부피가 어떻게 변하는지 분석한다.

4 정다각형 기둥의 최적화

정다각형 기둥(윗면 없음) 분석에서는 밑면의 한 변의 길이를 a , 기둥의 높이를 b 라 하고, 밑면의 변의 개수를 n 이라 한다. 이때, a 와 b 는 길이이므로 $a > 0$, $b > 0$ 이며, 밑면은 최소 삼각형이므로 $n \geq 3$ 이다. 그림 3은 해당 기둥을 나타내며, 길이 비율은 실제 해와 무관하다.

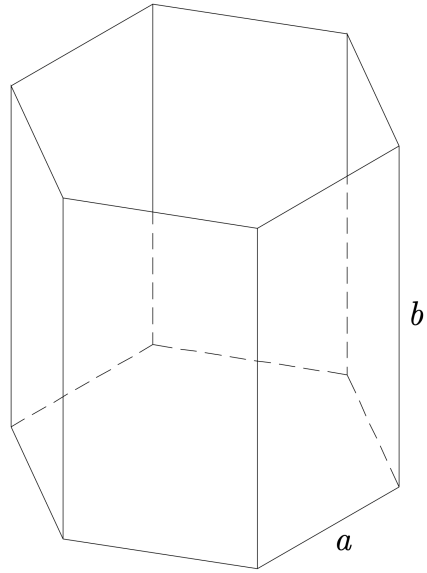


Figure 3: 윗면이 없는 정다각형 기둥

정다각형 기둥 분석에서도 벽의 두께는 무시하며, 길넓이는 상수 k 로 고정한다.

길넓이와 부피를 계산하기에 앞서 밑면의 넓이를 A 라 하자. 그림 4과 같이, 변의 개수가 n 개인 정다각형은 중심에서 각 꼭짓점으로 선을 그으면 n 개의 이등변삼각형으로 분할된다.

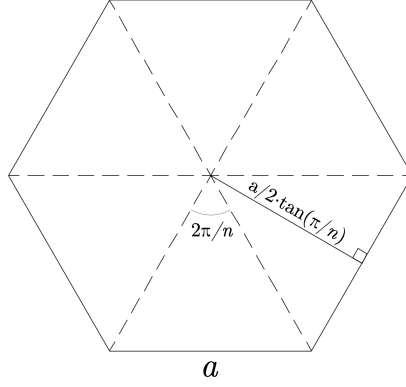


Figure 4: 정다각형 기둥 밑면

각 이등변삼각형의 꼭짓각은 $\frac{2\pi}{n}$ 이고, 밑변의 길이는 a 이다. 이때 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선은 이등변삼각형을 서로 합동인 두 직각삼각형으로 나눈다. 이 직각삼각형에서 삼각함수를 이용하면 높이는

$$\frac{a}{2 \tan(\pi/n)}$$

임을 구할 수 있다.

따라서 각 이등변삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2 \tan(\pi/n)} = \frac{a^2}{4 \tan(\pi/n)}$$

이다.

이러한 삼각형이 n 개 존재하므로, 밑면의 전체 넓이 A 는

$$A = \frac{na^2}{4 \tan(\pi/n)} \quad (14)$$

이 된다.

이때 계산의 편의를 위해

$$t = \frac{n}{4 \tan(\pi/n)} \quad (15)$$

로 두면, 위 식은 다음과 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$A = ta^2 \quad (16)$$

다음으로 밑면의 둘레를 P 라고 하자. P 는

$$P = na \quad (17)$$

로 나타낼 수 있다.

기둥의 겹넓이는 윗면이 없기 때문에 밑면의 넓이 A 와 옆면의 넓이 Pb 의 합이다.

$$S(a, b, n) = A + Pb \quad (18)$$

따라서 제약조건은

$$S(a, b, n) = k \iff A + Pb = k \quad (19)$$

이다. 한편 부피는

$$V(a, b, n) = Ab \quad (20)$$

이다.

4.1 제약조건을 이용한 변수 제거

식 19을 b 에 대해서 정리하면

$$b = \frac{k - A}{P} \quad (21)$$

가 된다. 이를 식 20에 대입하면 부피는

$$V(a, n) = Ab = A \cdot \frac{k - A}{P} = \frac{t(ka - ta^3)}{n} \quad (22)$$

이 된다.

본 문제는 원래 밑면의 변 길이 a , 변의 수 n , 높이 b 의 세 변수로 기술된다. 그러나 제약조건 $A + Pb = k$ 를 b 에 대해 풀어 $b = \frac{k-A}{P}$ 로 나타낸 뒤 이를 부피식에 대입했으므로, b 는 더 이상 독립적으로 선택되는 변수가 아니다. 결과적으로 부피는 식 22와 같이 (a, n) 에 의해 결정되며, 이 단계에서의 자유변수는 a 와 n 두 개이다.

다만 n 은 정 n 각형이라는 밑면의 종류를 결정하는 정수이므로, 우선 특정한 n 을 고정한 상태에서 최적의 크기 a 를 찾는 방식으로 문제를 단계적으로 해결한다. 즉, $V(a, n)$ 가 최대가 되는 n 을 n_0 라고 할 때, 먼저 $n = n_0$ 를 상수로 두고 a 에 대해 다음의 1변수 함수

$$V_{n_0}(a) := V(a, n_0)$$

를 최대화한다.

4.2 $n = n_0$ 에서의 a 에 대한 최적 조건

$n = n_0$ 를 고정하면 t 와 n_0 는 상수이며,

$$V_{n_0}(a) = \frac{t}{n_0} (ka - ta^3) \quad (23)$$

는 a 에 대한 미분 가능한 함수가 된다. 최대 부피가 내부점에서 발생한다면, 기울기 $V'_{n_0}(a)$ 가 양수이면 a 를 조금 증가시켜 부피를 더 키울 수 있고, 음수이면 a 를 조금 감소시켜 부피를 더 키울 수 있으므로 최대가 될 수 없다. 따라서 내부 최대점에서는

$$V'_{n_0}(a) = 0 \quad (24)$$

이 성립해야 한다.

이를 계산하면,

$$V'_{n_0}(a) = \frac{t}{n_0} (k - 3ta^2) \quad (25)$$

이므로,

$$\frac{t}{n_0} (k - 3ta^2) = 0 \implies k - 3ta^2 = 0 \implies a^2 = \frac{k}{3t}. \quad (26)$$

또한

$$V''_{n_0}(a) = \frac{t}{n_0} (-6ta) < 0 \quad (a > 0)$$

이므로 식 26에서 얻은 임계점은 실제로 최대 부피를 준다. 따라서 정 n_0 각기둥에서 최대 부피를 만들기 위한 변의 길이는

$$a = \sqrt{\frac{k}{3t}} \quad (27)$$

로 결정된다.