고정된 겉넓이를 갖는 기둥의 최대 부피에 대한 탐구

Contents

1 서론 **2**

2 연구 설계 **2**

3 직육면체의 최적화 **2**

3.1 제약조건을 이용한 변수 제거 3

3.2 극댓값에서 $a = b$인 이유 3

3.3 최대 부피와 a, b, c의 비율 4

3.4 해석 및 다음 단계 6

4 정다각형 기둥의 최적화 **6**

4.1 제약조건을 이용한 변수 제거 8

4.2 $n = n_0$에서의 a에 대한 최적 조건 9

4.3 최적 조건에서의 A와 b 9

4.4 최적 조건에서의 부피 9

5 원기둥의 최적화 **12**

6 n에 따른 변화 **14**

7 결론 **15**

1 서론

본 연구는 3D 프린터로 정해진 필라멘트 양으로 최대한의 부피를 가진 컨테이너를 구하는 것에 대해 탐구한다. 본 저자는 평소 모델링이나 3D 프린팅에 관심이 많아 필요한 제품이 있을때 직접 디자인하여 출력하는 것을 좋아한다. 최근에는 로봇 개발을 위해 대량의 나사와 너트를 주문했다. 다양한 종류의 부품들이 비닐봉투에 담겨 왔다. 이들을 분류하여 정리하여 필요할때에 사용하기 위해 부품 종류별로 컨테이너를 만들기로 했다. 컨테이너를 디자인하는 것은 매우 쉽다. 그러나 적은 필라멘트로 최대 부피를 가진 컨테이너를 만들 수 있는 방안에 대해서는 생각해보지 않았다. 3D 프린팅을 자주하고 모델링이나 출력에 문제가 있는 경우 다시 출력해야하기 때문에 평소 필라멘트를 낭비하는 경우가 많았다. 이때문에 필라멘트를 자주 구매해야하기도 했으며, 환경에도 좋지 않았다. 따라서 정해진 필라멘트 양으로 최대 부피를 가진 컨테이너를 구하게 되었다.

2 연구 설계

본 저자가 원하는 컨테이너는 윗면이 없는 기둥이며, 해당 컨테이너를 만들때 사용할 수 있는 필라멘트의 양을 제한한다. 이때 속이 빈 컨테이너를 출력할때 필요한 필라멘트의 양은 컨테이너의 겉넓이와 비례하며, 벽의 두께는 무시한다. 그렇다면 고정된 필라멘트 양으로 제작할 수 있는 최대 부피의 컨테이너를 구하는 것은, 고정된 겉넓이를 가진 최대 부피의 컨테이너를 구하는 것과 같다.

우선 밑면이 직사각형인 기둥인 직육면체에 대해서 최대 부피를 탐구해본 뒤, 밑면이 정다각형인 기둥에 대해서도 탐구하여 어떤 밑면이 어떤 도형일때 부피가 최대가 되는지 탐구한다. 겉넓이는 k라는 상수로 고정한다. 처음에는 변의 수가 많은 정다각형일수록 부피가 더 클 것이라 직관적으로 예상하였다. 이 탐구에서는 그 예상이 수학적으로 타당한지를 검증하고, 나아가 어떤 도형이 진정한 최적인지를 엄밀하게 밝힌다.

3 직육면체의 최적화

직육면체(윗면 없음)의 가로, 세로, 높이를 각각 a, b, c로 둔다. (이들은 모두 길이이므로 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$이다.) 그림 1은 해당 직육면체를 나타내며, 길이 비율은 실제 해와 무관하다.

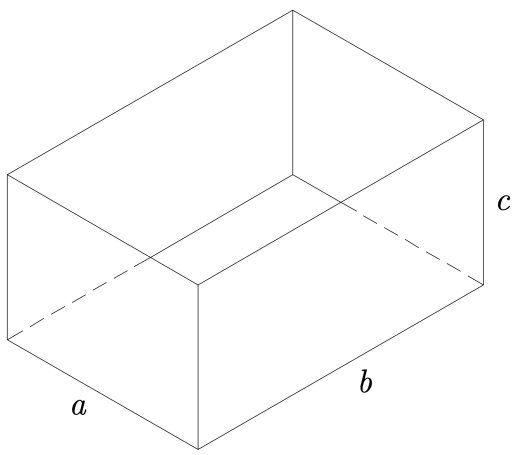


Figure 1: 윗면이 없는 직육면체

본 연구에서는 사용할 수 있는 필라멘트 양이 고정되어 있으므로(두께 무시), 컨테이너의 겉넓이를 상수 k로 고정한다.

윗면이 없으므로 겉넓이 S는 바닥 ab와 네 옆면 $2bc + 2ca$의 합인 $S(a, b, c) = ab + 2bc + 2ca$이다.

따라서 제약조건은

$$S(a, b, c) = k \quad \Longleftrightarrow \quad ab + 2c(a + b) = k \tag{1}$$

이다. 한편 부피 V는 $V(a, b, c) = abc$이다.

3.1 제약조건을 이용한 변수 제거

밑면의 넓이를 p라 두면 $p = ab$이다. 식 1는 $p + 2c(a + b) = k$가 되며, 이를 c에 대해 풀면

$$c = \frac{k - p}{2(a + b)} \tag{2}$$

이다. 따라서 부피는

$$V(a, b) = ab \cdot c = p \cdot \frac{k - p}{2(a + b)} \tag{3}$$

로 쓸 수 있다.

3.2 극댓값에서 $a = b$인 이유

이제 어떤 후보 (a, b, c)가 부피를 최대로 만드는 최적해라고 가정하자. 그 후보에서의 밑면 넓이 $p = ab$는 어떤 특정한 값 p_0를 갖는다. 이때 p가 동일한 다른 직사각형들(즉 $ab = p_0$인 다른 (a, b))

과 비교해도, 최적해라면 부피가 가장 커야한다.

식 3에서 k와 p가 고정되면,

$$V(a,b) = p \cdot \frac{k-p}{2(a+b)} = \frac{p \cdot (k-p)}{2(a+b)}$$

분자 부분이 상수가 된다. 따라서 V를 크게 만들기 위해서는 분모의 $(a+b)$가 최소가 되어야 한다. 그런데 $ab = p$가 고정일때 산술기하 평균에 의해

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{p}$$

가 성립하고, 등호는 $a = b$일 때에만 성립한다. 따라서 $ab = p$인 후보들 중 $(a+b)$가 최소가 되는 경우는 $a = b$이며, 결국 최적해는 반드시 $a = b$를 만족해야한다.

위에서 사용한 산술기하 평균(AM-GM) 방법 외에 편미분을 이용하는 방법으로도 $a = b$를 도출할 수 있다. 편미분(partial derivative)이란 두 개 이상의 변수를 가진 함수에서, 나머지 변수를 모두 상수로 고정하고 특정 변수 하나에 대해서만 미분하는 것을 의미한다. 예를 들어 $f(x,y) = x^2y + 3xy^2$에서 y를 상수로 취급하고 x에 대해 미분하면 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3y^2$이 된다.
식 3의 부피 $V(a,b) = \dfrac{ab(k-ab)}{2(a+b)}$에 편미분을 적용하면, b를 상수로 두고 a로 미분한 $\dfrac{\partial V}{\partial a} = 0$을 정리하면 $k = a^2 + 2ab$가 되고, 대칭적으로 a를 상수로 두고 b로 미분한 $\dfrac{\partial V}{\partial b} = 0$을 정리하면 $k = 2ab + b^2$가 된다. 두 식을 연립하면 $a^2 = b^2$, 즉 $a = b$ $(a, b > 0)$가 도출된다.

이처럼 편미분을 이용한 접근은 두 방정식을 연립하여 $a = b$를 직접 이끌어 낸다. 반면 AM-GM 방법은 "분모 $(a+b)$를 최소화한다"는 기하학적 직관을 바탕으로 등호 성립 조건을 바로 읽어낸다는 장점이 있다. 두 방법 모두 같은 결론에 이르지만, AM-GM은 왜 $a = b$여야 하는지를 보다 직관적으로 설명해 준다.

3.3 최대 부피와 a, b, c의 비율

이제 b를 a로 두면, $p = ab = a^2$이고, 식 3을 정리하면 부피는

$$V(a) = p \cdot \frac{k-p}{2(a+b)} = \frac{ka - a^3}{4}$$

가 된다.

최댓값이 되는 지점에서 도함수의 값이 0이어야 하기에, $V'(a) = 0$을 풀면,

$$V'(a) = \frac{1}{4}\left(k - 3a^2\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = \sqrt{\frac{k}{3}}$$

이 된다.

또한 $V''(a) = -\frac{6}{4}a$에서 $a > 0$이기 때문에 $V''(a) < 0$이 항상 성립한다. 따라서 그림 2에서도 볼 수 있듯이 $a < \sqrt{\frac{k}{3}}$일때는 $V'(a) > 0$임으로 $V(a)$가 증가하며, $a > \sqrt{\frac{k}{3}}$일때는 $V'(a) < 0$임으로 $V(a)$가 감소하기 때문에, $a = \sqrt{\frac{k}{3}}$인 지점이 $V(a)$의 최댓값임을 알 수 있다.

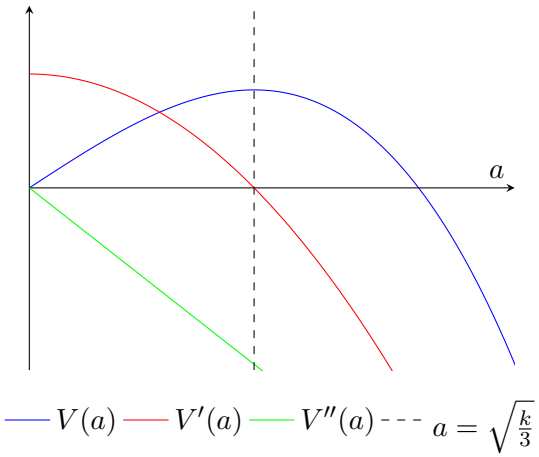


Figure 2: 함수 $V(a)$와 도함수 및 이계도함수 그래프

도출한 a값을 식 2에 대입하면,

$$c = \frac{k-p}{2(a+b)} = \frac{k - \left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right)^2}{4\sqrt{\frac{k}{3}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{3}} = \frac{1}{2}a$$

이 된다. 따라서 최적 비율은

$$\boxed{a = b = 2c} \tag{4}$$

이다.

마지막으로 최대 부피는

$$V_{\max} = abc = a^2c = \left(\frac{k}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{3}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{5}$$

이 된다.

직관적으로 정육면체(높이와 밑변이 같은 경우)가 부피를 최대화할 것이라 예상하였으나, 윗면이

없는 조건으로 인해 높이 c가 밑변 a의 절반이 되는 형태가 최적임을 알 수 있었다. 이는 윗면이 없어 절약된 겉넓이를 밑면 확장에 더 유리하게 사용할 수 있기 때문으로 해석된다.

3.4 해석 및 다음 단계

직육면체의 부피가 최대가 될때 $a = b$이므로 밑면은 정사각형이 된다. 이를 바탕으로 밑면이 정n각형인 기둥으로 확장하여, 변의 수 n이 증가할수록 최대 부피가 어떻게 변하는지 분석한다. 이때 변이 많아질수록 밑면이 원에 가까워지므로, 부피가 단조 증가하여 원기둥이 최적일 것이라 예상하였다. 이를 수학적으로 엄밀히 확인한다.

4 정다각형 기둥의 최적화

정다각형 기둥(윗면 없음) 분석에서는 밑면의 한 변의 길이를 a, 기둥의 높이를 b라 하고, 밑면의 변의 개수를 n이라 한다. 이때, a와 b는 길이이므로 $a > 0$, $b > 0$이며, 밑면은 최소 삼각형이므로 $n \geq 3$이다. 그림 3은 해당 기둥을 나타내며, 길이 비율은 실제 해와 무관하다.

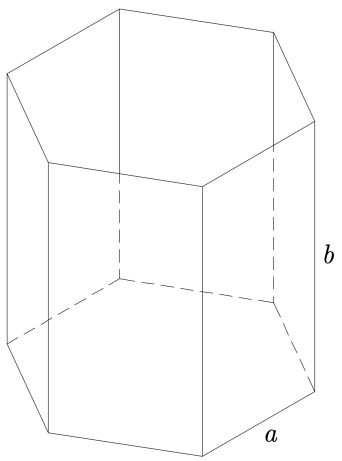


Figure 3: 윗면이 없는 정다각형 기둥

정다각형 기둥 분석에서도 벽의 두께는 무시하며, 겉넓이는 상수 k로 고정한다.

겉넓이와 부피를 계산하기에 앞서 밑변의 넓이를 A라 하자. 그림 4과 같이, 변의 개수가 n개인 정다각형은 중심에서 각 꼭짓점으로 선을 그으면 n개의 이등변삼각형으로 분할된다.

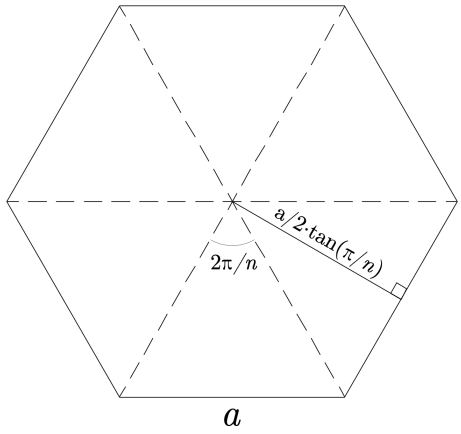


Figure 4: 정다각형 기둥 밑면

각 이등변삼각형의 꼭짓각은 $\frac{2\pi}{n}$이고, 밑변의 길이는 a이다. 이때 꼭짓점에서 밑변에 내린 수선은 이등변삼각형을 서로 합동인 두 직각삼각형으로 나눈다. 이 직각삼각형에서 삼각함수를 이용하면 높이는 $\dfrac{a}{2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$임을 구할 수 있다.

따라서 각 이등변삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}=\frac{a^2}{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

이다.

이러한 삼각형이 n개 존재하므로, 밑면의 전체 넓이 A는

$$A=\frac{na^2}{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

이 된다.

이때 계산의 편의를 위해 (t는 n에 따라 결정되는 양수 상수이다)

$$t=\frac{n}{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

로 두면, 위 식은 다음과 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$A=ta^2 \tag{6}$$

다음으로 밑면의 둘레를 P라고 하자. P는

$$P = na \tag{7}$$

로 나타낼 수 있다.

기둥의 겉넓이 S는 윗면이 없기 때문에 밑면의 넓이 A와 옆면의 넓이 Pb의 합인 $S(a,b,n) = A+Pb$ 이다. 따라서 제약조건은

$$S(a,b,n) = k \quad \Longleftrightarrow \quad A + Pb = k \tag{8}$$

이다. 한편 부피 V는

$$V(a,b,n) = Ab \tag{9}$$

이다.

4.1 제약조건을 이용한 변수 제거

식 8을 b에 대해서 정리하면

$$b = \frac{k-A}{P} \tag{10}$$

가 된다. 이를 식 9에 대입하면 부피는

$$V(a,n) = Ab = A \cdot \frac{k-A}{P} = \frac{t(ka - ta^3)}{n} \tag{11}$$

이 된다.

본 문제는 원래 밑면의 변 길이 a, 변의 수 n, 높이 b의 세 변수로 기술된다. 그러나 제약조건 $A + Pb = k$를 b에 대해 풀어 $b = \frac{k-A}{P}$로 나타낸 뒤 이를 부피식에 대입했으므로, b는 더 이상 독립적으로 선택되는 변수가 아니다. 결과적으로 부피는 식 11와 같이 (a,n)에 의해 결정된다.

따라서 제약조건을 만족하면서 부피를 최대화하는 (a,n) 쌍을 찾아야 한다. 우선 고정된 n에서 최대 부피가 되는 a를 찾는 것부터 진행한다. 즉, n을 3이상의 임의의 정수 n_0라고 할 때, 먼저 $n = n_0$를 상수로 두고 a에 대한 1변수 함수 $V_{n_0}(a) := V(a,n_0)$를 최대화한다.

4.2 $n = n_0$에서의 a에 대한 최적 조건

$n = n_0$를 고정하면 t와 n_0는 상수이며, $V_{n_0}(a) = \frac{t}{n_0}(ka - ta^3)$는 a에 대한 함수가 된다. 앞서 직육면체에서와 동일한 방법으로 $V'_{n_0}(a) = 0$을 풀면,

$$\frac{t}{n_0}(k - 3ta^2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = \sqrt{\frac{k}{3t}} \tag{12}$$

이 된다. 또한 $V''_{n_0}(a) = \frac{t}{n_0}(-6ta) < 0 \ (a > 0)$이므로 이 임계점이 최댓값임을 알 수 있다.

4.3 최적 조건에서의 A와 b

식 6에 계산한 a값을 대입하면,

$$A = ta^2 = \frac{k}{3} \tag{13}$$

이 된다. A가 k로만 나타내어진다는 것은 n의 값에 상관없이 정다각형 기둥의 부피가 최대가 될때, 밑면의 넓이는 일정하다는 것을 의미한다. 이는 위에서 직육면체의 부피가 최대가 되는 경우에서도 두 밑면의 길이가 모두 $\sqrt{\frac{k}{3}}$가 되어, 밑면의 넓이가 $\frac{k}{3}$이 되었기 때문에 이 결과를 만족한다고 할 수 있다. 이 결과는 처음에 예상하지 못한 것이었다. 밑면의 형태가 삼각형이든 정사각형이든 원이든 관계없이, 최대 부피 조건에서는 겉넓이의 정확히 $\frac{1}{3}$이 항상 밑면에 배분된다는 보편적 원리가 성립함을 발견하였다.

기둥의 높이는 식 10에 구한 A값을 대입하면 $b = \frac{k-A}{P} = \frac{2k}{3P}$가 된다. 따라서 최대 부피 조건에서의 밑면 넓이와 높이를 정리하면

$$\boxed{A = \frac{k}{3}, \quad b = \frac{2k}{3P}} \tag{14}$$

이다.

4.4 최적 조건에서의 부피

기둥의 부피는 A와 b의 곱이기에, 최대 부피는

$$V_{\max} = Ab = \frac{2k^2}{9P} \tag{15}$$

가 된다.

여기서 k는 고정된 양수이며, $P > 0$이다. 따라서 $V_{\max}$는 P에 대하여 $V_{\max}(P) = \frac{C}{P} \left(C = \frac{2k^2}{9} > 0\right)$

와 같은 형태를 가진다.

함수 $V_{\max}(P)$는 $P > 0$에서 단조 감소 함수이므로, P가 작아질수록 $V_{\max}$는 증가한다. 따라서 최대 부피를 얻기 위해서는 P가 최소가 되어야 한다.

P는 식 7에 a값을 대입하면

$$P(n) = na = n\sqrt{\frac{k}{3t}} = 2\sqrt{\frac{kn\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{3}}$$

이 된다. 이때 식 12에서 a를 n으로 나타내었기 때문에, P는 n에 대한 일변수 함수가 된다.

$P(n)$이 최소가 되기 위해서는 $n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$이 최소가 되어야 한다.

$$Q(n) = n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (n \geq 3) \tag{16}$$

라고 하면, $Q(n)$이 최소가 될때의 n이 기둥의 부피를 최대화 한다. 여기서 n은 정n각형의 변의 개수를 의미하므로 본래 정수 $n \geq 3$에 한정된다. 그러나 함수 $Q(n)$의 증가 및 감소를 분석하기 위하여, n을 실수 $n > 2$로 확장하여 미분을 수행한다. 이러한 연속적 확장은 함수의 경향성을 파악하기 위한 것이며, 추후 해석은 다시 정수 n에 대해 이루어진다.

이 방법이 유효하려면 연속 범위에서 도출한 단조성이 이산적인 정수 범위에서도 동일하게 유지되어야 한다. 만약 $Q(n)$이 $n > 2$인 실수 범위에서 극값을 가진다면, 연속 분석에서 얻은 단조 감소 결론이 정수 n에는 적용되지 않을 수 있다. 그러나 본 탐구에서는 $Q'(n) < 0$을 모든 $n > 2$에 대해 엄밀히 증명하였으므로, 이 방법의 적용이 정당화된다.

$Q(n)$이 최소가 될 수 있는 후보 지점은 극값과 경계값이 있다.

먼저 극값이 최솟값이 되기 위해서는 해당 지점에서 도함수가 0이어야 하며, 이계도함수가 양수여야 한다. $Q(n)$의 도함수는 곱의 미분법에 따라

$$Q'(n) = \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) - \frac{\pi}{n}\sec^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

가 된다. 이때 계산을 간단히 하기 위하여 $\theta = \frac{\pi}{n}$이라 두면, $Q'(n) = \tan\theta - \theta\sec^2\theta$로 표현할 수 있기에,

$$\tan\theta - \theta\sec^2\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sin\theta\cos\theta = \theta$$

배각공식 $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$에 따르면 $\sin\theta\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$가 성립한다.

따라서 극값이 존재하기 위해서는 $\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$를 만족해야 한다. 이를 분석하기 위하여 다음과 같은 함수를 정의한다.

$$f(\theta) = \frac{\sin 2\theta}{2} - \theta \quad (\theta \leq \frac{\pi}{3}) \tag{17}$$

그러면 위 방정식은 $f(\theta) = 0$을 푸는 문제와 같다. 이 함수의 도함수는 $f'(\theta) = \cos 2\theta - 1$이다. 삼각함수의 성질에 의해 $\cos 2\theta \leq 1$이며, $\theta > 0$일 때는 $\cos 2\theta < 1$이므로 $f'(\theta) < 0$ $(\theta > 0)$가 성립한다. 따라서 $f(\theta)$는 $\theta > 0$에서 단조 감소한다. 또한 $f(0) = 0$이므로, $f(\theta) = 0$을 만족하는 해는 $\theta = 0$ 하나뿐이다. 그러나 $\theta = \frac{\pi}{n}$의 정의에 의해 $\theta = 0$이 되려면 $n \to \infty$이어야 하며, 유한한 n에서는 $\theta > 0$이다. 따라서 $Q(n)$은 유한한 n에서 내부 극값을 갖지 않는다.

더 나아가, 위에서 $f(\theta) < 0$ $(\theta > 0)$임을 보였으므로 $\sin\theta\cos\theta < \theta$가 성립한다. 이를 이용하면

$$Q'(n) = \tan\theta - \theta\sec^2\theta = \frac{\sin\theta\cos\theta - \theta}{\cos^2\theta} < 0$$

임을 직접 확인할 수 있다. 분자 $\sin\theta\cos\theta - \theta < 0$이고 분모 $\cos^2\theta > 0$이므로, $Q(n)$은 $n \geq 3$ 전체에서 순감소 함수이다.

내부에서 극값이 존재하지 않으므로, 최솟값은 경계에서만 발생할 수 있다. 본래 문제에서 n은 정n각형의 변의 개수를 의미하므로 정수 $n \geq 3$에 한정된다. 따라서 $Q(n)$의 정의역은 $\{n \mid n \geq 3,\ n \in \mathbb{Z}\}$이다.

이 정의역에서 가장 작은 값은 $n = 3$이므로, 좌측 경계값은 $Q(3) \approx 5.196$이다.

우측 경계값을 구하기 위해서는 극한을 사용한다. 이 경우 무한대로의 극한값을 구하는 것보다 0으로의 극한값을 구하는게 더 쉽기 때문에 $u = \frac{1}{n}$으로 정의하면 $\lim_{n\to\infty} Q(n) = \lim_{u\to 0^+} Q\left(\frac{1}{u}\right)$이 된다. 이를 계산하면

$$\lim_{u\to 0^+} Q\left(\frac{1}{u}\right) = \lim_{u\to 0^+} \frac{1}{u}\tan\pi u = \pi \cdot \lim_{u\to 0^+} \frac{\tan(\pi u)}{\pi u} \tag{18}$$

이 된다. $x = \pi u > 0$이라 두면 $u \to 0^+$일 때 $x \to 0^+$이므로 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{x}$만 구하면 된다.

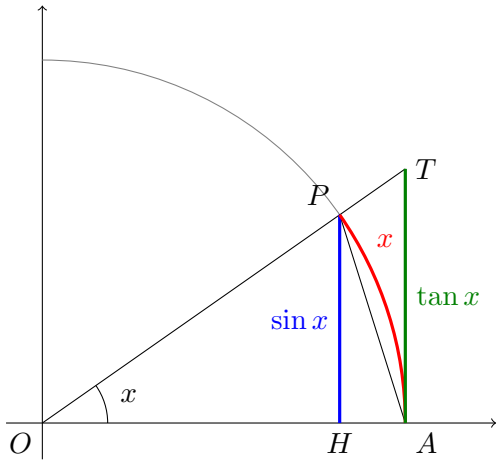


Figure 5: 단위원에서 $\sin x$, x, $\tan x$의 비교

그림 5의 단위원에서 $0 < x < \frac{\pi}{2}$일 때 $\triangle OAP \subset$ 부채꼴 $OAP \subset \triangle OAT$이므로 넓이를 비교하면 $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$이다. 따라서 역수를 취한 뒤 각 항에 $\sin x > 0$을 곱하면

$$\sin x < x < \tan x \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x} \quad \Longrightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

이다. $x \to 0^+$일 때 $\cos x \to \cos 0 = 1$이므로 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$이고,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

이다. 따라서 식 18은 $\lim_{n\to\infty} Q(n) = \pi \cdot 1 = \pi$가 된다. $\lim_{n\to\infty} Q(n) < Q(3)$이기 때문에 $Q(n)$의 최솟값은 n이 무한대일때임을 알 수 있다. 이는 밑면의 변이 더 많을수록 기둥의 부피가 더 커짐을 의미한다.

정다각형에서 변의 대수가 끊임없이 늘어나면 원이 되기 때문에 부피가 최대가 되는 밑면은 원이 되며, 이는 원기둥이 된다. 따라서 이번에는 제약조건하에서 가장 부피가 큰 원기둥에 대해서 탐구한다.

5 원기둥의 최적화

앞서 정다각형 분석에서 $Q(n)$이 순감소하며 $V_{\max}(n)$이 단조 증가함을 보였고, 그 극한이 $\frac{k^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3\pi}}$임을 확인하였다. 이제 극한의 도형인 원기둥의 최대 부피를 직접 계산하여 이 값과 일치하는지 검증한다.

원기둥(윗면 없음) 분석에서는 밑면 원의 반지름을 a, 기둥의 높이를 b라 한다. 이때, a와 b는 길이이므로 $a > 0$, $b > 0$이다. 그림 6은 해당 기둥을 나타내며, 길이 비율은 실제 해와 무관하다.

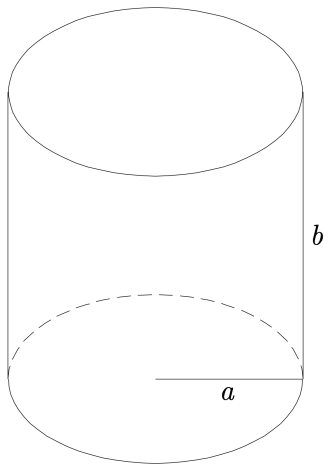


Figure 6: 윗면이 없는 원기둥

윗면이 없으므로 겉넓이 S는 밑면과 옆면의 합인 $S(a,b) = \pi a^2 + 2\pi ab$이다. 겉넓이는 k로 고정되어 있기 때문에 제약조건은

$$S(a,b) = k \quad \Longleftrightarrow \quad \pi a^2 + 2\pi ab = k \tag{19}$$

이다. 한편 부피 V는

$$V(a,b) = \pi a^2 b \tag{20}$$

이다.

식 19를 b에 대해 정리하면

$$b = \frac{k - \pi a^2}{2\pi a} \tag{21}$$

가 된다. 이를 이용해 식 20에 대입하면 부피는

$$V(a) = \frac{ak - \pi a^3}{2}$$

이 된다.

앞서와 동일한 방법으로 $V'(a) = 0$을 풀면,

$$\frac{k - 3\pi a^2}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = \sqrt{\frac{k}{3\pi}}$$

이 된다. $V''(a) = -3\pi a < 0$ $(a > 0)$이므로 이 임계점이 최댓값이다.

이때의 b는 식 21에 구한 a값을 대입하면,

$$b = \frac{k - \pi a^2}{2\pi a} = \frac{k - \pi \frac{k}{3\pi}}{2\pi \sqrt{\frac{k}{3\pi}}} = \sqrt{\frac{k}{3\pi}}$$

가 된다. 따라서 최적 비율은

$$\boxed{a = b} \tag{22}$$

이다.

최대 부피는

$$V_{\max} = \pi a^2 b = \pi a^3 = \pi \left(\frac{k}{3\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{23}$$

이다.

6 n에 따른 변화

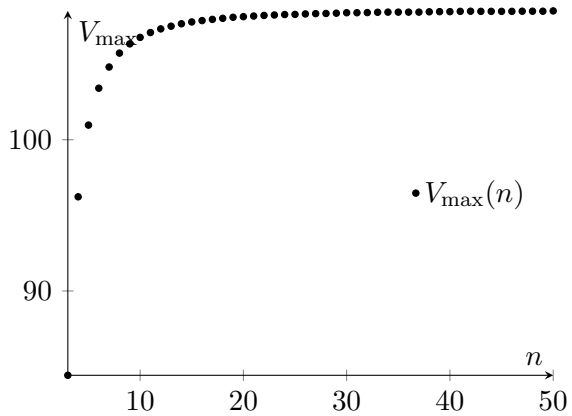


Figure 7: 함수 $V_{\max}(n)$ $(k = 100)$

그림 7은 정n각형 기둥에서 최대 부피 $V_{\max}(n)$이 변의 개수 n에 따라 어떻게 변화하는지를 나타낸 것이다. 이때 k는 100으로 고정되어 있으며, 각 n에 대해 앞서 도출한 최적 조건을 적용하여 계산한 값이다.

그래프를 통해 다음과 같은 특징을 관찰할 수 있다.

- n이 증가할수록 $V_{\max}(n)$은 단조 증가한다.
- 증가량은 점점 감소하며, 특정 값에 점근적으로 수렴하는 형태를 보인다.

이러한 경향은 앞서 유도한 식을 통해 이론적으로도 설명할 수 있다.

앞서 도출한 $V_{\max}(n) = \frac{2k^2}{9P(n)}$과 $P(n) = 2\sqrt{\frac{kn\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{3}}$를 결합하면,

$$V_{\max}(n) = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Q(n)}}$$

로 나타낼 수 있다. 따라서 $V_{\max}(n)$의 증감은 $Q(n) = n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$의 변화에 의해 결정된다.

앞서 $Q(n)$이 순감소하며 $\lim_{n\to\infty} Q(n) = \pi$임을 보였다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} V_{\max}(n) = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3\pi}}$$

가 된다.

이 값은 이후 원기둥의 최대 부피로 도출된 값과 정확히 일치한다. 이러한 일치는 정다각형이 $n \to \infty$일 때 원으로 수렴한다는 기하학적 사실의 수학적 표현이다. 탐구 초반에 세운 예상인 "변이 많을수록 부피가 크고 원기둥이 최적일 것이다"가 극한 분석과 원기둥 직접 계산 모두에서 검증된 것이다.

기하학적으로 해석하면, 정다각형은 변의 개수가 증가할수록 원에 가까워지며, 같은 넓이를 가질 때 둘레가 점점 감소한다. 이로 인해 동일한 겉넓이 조건에서 더 많은 면적을 밑면에 할당할 수 있게 되고, 결과적으로 부피가 증가하게 된다.

그러나 n이 충분히 커진 이후에는 정다각형과 원 사이의 차이가 매우 작아지기 때문에, 부피 증가 역시 거의 발생하지 않는다. 이는 그래프에서 증가가 점점 완만해지는 형태로 나타난다.

따라서 정n각형 기둥의 최대 부피는 n이 증가함에 따라 단조 증가하며, 그 극한은 원기둥의 최대 부피와 일치한다.

7 결론

본 연구는 고정된 겉넓이 k를 가지는 윗면이 없는 기둥 중에서 최대 부피를 가지는 도형을 탐구하였다. 이는 3D 프린터로 제한된 필라멘트 양을 사용할 때 가장 효율적인 컨테이너 형태를 찾는 문제로부터 출발하였다.

먼저 밑면이 직사각형인 직육면체의 경우를 분석하였다. 겉넓이 $S = ab + 2ac + 2bc = k$의 제약조건 하에서 부피 $V = abc$를 최대화한 결과, $a = b = 2c$일 때 최대 부피가 됨을 도출하였다. 즉, 밑면은 정사각형이 되며, 높이는 밑변 길이의 절반이 된다. 또한 이때 밑면의 넓이는 항상 $A = \frac{k}{3}$이 됨을 확인하였다.

이를 일반화하여 밑면이 정n각형인 기둥을 분석하였다. 제약조건을 이용하여 높이를 소거하고 부피를 (a, n)의 함수로 표현한 뒤, 고정된 n에서 최대가 되는 a를 구하였다. 그 결과, $a = \sqrt{\frac{k}{3t}}$이며, 이때 역시 밑면의 넓이는 $A = \frac{k}{3}$이 됨을 확인하였다. 이는 밑면의 형태와 무관하게, 최대 부피를 가지는 경우에는 전체 겉넓이의 $\frac{1}{3}$이 밑면에, $\frac{2}{3}$이 옆면에 배분된다는 것을 의미한다.

다음으로 부피 최대화를 위해서는 둘레 P가 최소가 되어야 함을 보였고, 이를 위해 함수 $Q(n) = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$을 분석하였다. 내부 극값이 존재하지 않음을 증명하고, 경계 분석을 통해 $\lim_{n\to\infty} Q(n) = \pi$임을 도출하였다. 이는 변의 개수가 증가할수록 둘레가 감소하며, 그 극한이 원의 경우와 일치함을 의미한다.

따라서 고정된 겉넓이 조건 하에서 최대 부피를 가지는 도형은 밑면이 원인 원기둥임을 알 수 있다. 이는 정다각형이 변의 개수를 무한히 늘릴 때 원이 된다는 기하학적 사실과도 일치한다.

세 도형에 대한 최적 조건과 최대 부피를 표 1에 정리한다.

도형	최적 비율	밑면 넓이	최대 부피
직육면체	$a = b = 2c$	$\frac{k}{3}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{k}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$
정n각형 기둥	$A = \frac{k}{3},\ b = \frac{2k}{3P}$	$\frac{k}{3}$	$\frac{2k^2}{9P(n)}$
원기둥	$a = b$	$\frac{k}{3}$	$\pi\left(\frac{k}{3\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$

Table 1: 도형별 최대 부피 조건 비교

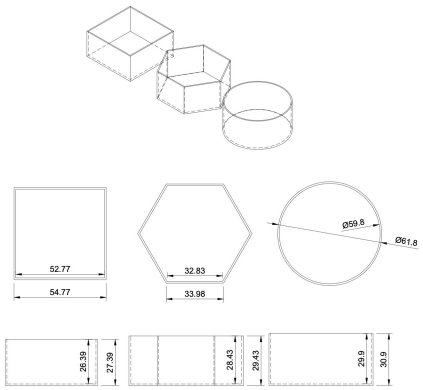
표에서 밑면 넓이가 세 경우 모두 $\frac{k}{3}$로 동일함을 한눈에 확인할 수 있다.

실제 3D 프린팅 결과

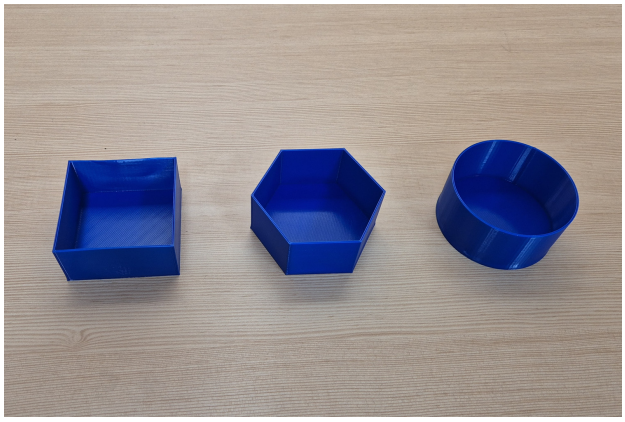
서론에서 밝혔듯이 본 탐구는 로봇 개발용 나사와 너트를 정리할 컨테이너를, 정해진 필라멘트 양으로 최대한 크게 만들고 싶다는 동기에서 출발하였다. 따라서 도출한 결과가 실제 출력물에서도 성립하는지 확인하기 위해, 직육면체, 정육각기둥, 원기둥 컨테이너를 직접 CAD로 설계하고 3D 프린터로 출력한 뒤 물을 이용하여 부피를 측정하였다.

겉넓이는 $k = 90\,\mathrm{cm}^2$로 정하고, 각 컨테이너의 바깥 치수는 앞서 도출한 최적 조건을 그대로 따랐다. 실제 출력물에서는 벽 두께를 무시할 수 없으므로 옆벽과 바닥의 두께를 모두 $d = 1\,\mathrm{mm} = 0.1\,\mathrm{cm}$로 하고, 벽이 바깥 치수의 안쪽을 채우도록 설계하였다. 윗면이 없으므로 안쪽 공간은 밑면 방향으로는 양쪽 벽 두께인 $2d$만큼, 높이 방향으로는 바닥 두께인 d만큼만 줄어든다. 예를 들어 바깥

치수가 $5 \times 5 \times 5\,\mathrm{cm}$인 정육면체라면 안쪽 공간은 $4.8 \times 4.8 \times 4.9\,\mathrm{cm}$가 된다. 그림 8a은 CAD 설계 도면이며, 그림 8b는 실제 출력물이다.



(a) CAD 설계 도면 (단위: mm)



(b) 출력한 컨테이너 (직육면체, 정육각기둥, 원기둥)

Figure 8: 3D 프린팅 컨테이너의 설계와 출력물

이론 최대 부피와 벽 두께를 고려한 부피

$k = 90\,\mathrm{cm}^2$를 앞서 도출한 최적 조건에 대입하여 바깥 치수를 정하였으며(그림 8a), 벽 두께를 무시한 이론 최대 부피 $V_{\max}$는 표 1의 식으로 계산하였다.

벽 두께를 고려한 안쪽 공간의 부피 $V_{\text{벽}}$은 밑면 방향으로 양쪽 벽 두께를, 높이 방향으로 바닥 두께를 뺀 값이다. 정다각형의 경우 중심에서 변까지의 거리 $\frac{a}{2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$가 d만큼 줄어들므로 안쪽 한 변의 길이는 $a - 2d\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$가 된다($n = 4$이면 $a - 2d$). 따라서 각 도형의 $V_{\text{벽}}$은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\text{직육면체:} \quad & V_{\text{벽}} = (a - 2d)^2(c - d) \\
\text{정육각기둥:} \quad & V_{\text{벽}} = t\left(a - \frac{2d}{\sqrt{3}}\right)^2 (b - d) \\
\text{원기둥:} \quad & V_{\text{벽}} = \pi(a - d)^2(b - d)
\end{aligned}
$$

세 도형 모두 벽이 차지하는 부피 $V_{\max} - V_{\text{벽}}$은 약 $8.7\,\mathrm{cm}^3$로 거의 같다. 이는 벽의 부피가 대략 겉넓이와 두께의 곱인 $kd = 9.0\,\mathrm{cm}^3$이기 때문이며, 모서리에서 벽이 서로 겹치는 부분만큼 조금 더 작게 나타난다. 벽의 부피는 곧 출력에 사용된 필라멘트의 부피이므로, 이 결과는 연구 설계에서 세운 "필라멘트 양은 겉넓이에 비례한다"는 가정이 타당함을 보여준다.

물을 이용한 부피 측정

마지막으로 출력한 세 컨테이너에 증류수를 가득 채운 뒤 담긴 물의 질량을 측정하였다. 증류수는 $1\,\mathrm{cm}^3$당 질량이 약 $1\,\mathrm{g}$이므로, 측정한 질량의 수치를 그대로 부피 $V_{\text{측정}}$으로 볼 수 있다. 측정 결과는 직육면체 $73\,\mathrm{g}$, 정육각기둥 $79.2\,\mathrm{g}$, 원기둥 $83\,\mathrm{g}$이었다.

오차는 $\frac{V_{\text{측정}}-V_{\text{벽}}}{V_{\text{벽}}} \times 100\,\%$로 계산하였으며, 전체 결과를 표 2에 정리한다.

도형	$V_{\max}\,(\mathrm{cm}^3)$	$V_{\text{벽}}\,(\mathrm{cm}^3)$	$V_{\text{측정}}\,(\mathrm{cm}^3)$	오차
직육면체	82.2	73.5	73.0	$-0.7\,\%$
정육각기둥	88.3	79.6	79.2	$-0.5\,\%$
원기둥	92.7	84.0	83.0	$-1.2\,\%$

Table 2: $k = 90\,\mathrm{cm}^2$일 때 이론 최대 부피, 벽 두께를 고려한 부피, 측정 부피

세 컨테이너 모두 측정 부피가 벽 두께를 고려한 부피와 $1.2\,\%$ 이내로 일치하였다. 측정값이 모두 계산값보다 약간 작은 것은 물을 가장자리 끝까지 정확히 채우기 어렵다는 점, 출력 과정에서 벽이나 바닥이 설계보다 약간 두껍게 만들어질 수 있다는 점 등이 원인으로 생각된다. 또한 실온에서 증류수의 밀도는 $1\,\mathrm{cm}^3$당 $1\,\mathrm{g}$보다 조금 작으므로, 질량의 수치를 그대로 부피로 본 것도 작은 오차를 만든다.

가장 중요한 점은 부피의 크기 순서인 원기둥 > 정육각기둥 > 직육면체가 이론값, 벽 두께를 고려한 값, 측정값 모두에서 동일하게 나타났다는 것이다. 즉, 변의 수가 많을수록 부피가 커지고 원기둥이 최적이라는 수학적 결론이 실제 출력물에서도 확인되었다. 원기둥은 직육면체보다 이론상 약 $12.8\,\%$, 측정상 약 $\frac{83-73}{73} \approx 13.7\,\%$ 더 큰 부피를 가졌다. 벽이 차지하는 부피는 세 도형이 거의 같으므로, 원래 부피가 작은 직육면체일수록 벽으로 잃는 비율이 커져($10.6\,\%$, 원기둥은 $9.4\,\%$) 실제 출력물에서는 원기둥의 이점이 오히려 조금 더 커진다.

본 연구를 통해 도출된 가장 중요한 통찰은 다음과 같다.

- 최대 부피가 되는 경우, 밑면 넓이는 항상 $\frac{k}{3}$이다.
- 최대 부피는 옆면 둘레가 최소가 되는 도형에서 발생한다.
- 정다각형은 변의 수가 증가할수록 원에 수렴하며, 원기둥이 최적 구조가 된다.

다만 본 연구에는 몇 가지 한계와 확장 가능성이 있다. 첫째, 벽 두께를 무시하여 겉넓이와 필라멘트

사용량이 완전히 비례한다고 가정하였다. 실제 3D 프린팅에서는 일정한 벽 두께가 유지되므로, 도형의 모서리나 꼭짓점 처리 방식에 따라 필라멘트 사용량 계산이 달라질 수 있다. 둘째, 본 연구는 윗면이 없는 기둥에 한정되었다. 윗면이 있는 닫힌 원기둥의 경우 겉넓이 공식이 $S = 2\pi a^2 + 2\pi ab$로 바뀌며, 동일한 방법으로 최적화하면

$$V'(a) = \frac{k}{2} - 3\pi a^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = \sqrt{\frac{k}{6\pi}}, \quad b = 2a$$

가 되어 높이가 지름과 같은 형태가 최적이다. 이는 열린 원기둥의 최적 비율 $a = b$와 다르며, 윗면의 존재 여부가 최적 구조에 직접적인 영향을 줌을 보여준다. 셋째, 실제 3D 프린팅에서는 재료의 밀도, 적층 구조, 내부 채움률(infill) 등의 요소가 영향을 줄 수 있으며, 향후 연구에서는 이러한 현실적 요소를 포함하여 보다 정밀한 모델로 확장할 수 있을 것이다.

결론적으로, 고정된 겉넓이를 가지는 윗면이 없는 기둥 중 최대 부피를 가지는 도형은 원기둥이며, 이는 대칭성과 둘레 최소화의 원리에 의해 설명된다.