

고정된 겉넓이를 갖는 기둥의 최대 부피에 대한 탐구

이승준

March 17, 2026

Contents

1	서론	3
2	연구 설계	3
3	직육면체의 최적화	3
3.1	제약조건을 이용한 변수 제거	4
3.2	극댓값에서 $a = b$ 인 이유	5
3.3	최대 부피와 a, b, c 의 비율	5
3.4	해석 및 다음 단계	6
4	정다각형 기둥의 최적화	7
4.1	제약조건을 이용한 변수 제거	9
4.2	$n = n_0$ 에서의 a 에 대한 최적 조건	9
4.3	최적 조건에서의 A 와 b	10
4.4	최적 조건에서의 부피	11
5	원기둥의 최적화	13
6	n 에 따른 변화	15
7	결론	16

1 서론

본 연구는 3D 프린터로 정해진 필라멘트 양으로 최대한의 부피를 가진 컨테이너를 구하는 것에 대해 탐구한다. 본 저자는 평소 모델링이나 3D 프린팅에 관심이 많아 필요한 제품이 있을때 직접 디자인하여 출력하는 것을 좋아한다. 최근에는 로봇 개발을 위해 대량의 나사와 너트를 주문했다. 다양한 종류의 부품들이 비닐봉투에 담겨 왔다. 이들을 분류하여 정리하여 필요할때에 사용하기 위해 부품 종류별로 컨테이너를 만들기로 했다. 컨테이너를 디자인하는 것은 매우 쉽다. 그러나 적은 필라멘트로 최대 부피를 가진 컨테이너를 만들 수 있는 방안에 대해서는 생각해 보지 않았다. 3D 프린팅을 자주하고 모델링이나 출력에 문제가 있는 경우 다시 출력해야하기 때문에 평소 필라멘트를 낭비하는 경우가 많았다. 이때문에 필라멘트를 자주 구매해야하기도 했으며, 환경에도 좋지 않았다. 따라서 정해진 필라멘트 양으로 최대 부피를 가진 컨테이너를 구하게 되었다.

2 연구 설계

본 저자가 원하는 컨테이너는 윗면이 없는 기둥이다.

해당 컨테이너를 만들때 사용할 수 있는 필라멘트의 양을 제한한다.

이때 속이 빈 컨테이너를 출력할때 필요한 필라멘트의 양은 컨테이너의 겉넓이와 비례한다. 벽의 두께는 무시한다.

그렇다면 고정된 필라멘트 양으로 제작할 수 있는 최대 부피의 컨테이너를 구하는 것은, 고정된 겉넓이를 가진 최대 부피의 컨테이너를 구하는 것과 같다.

우선 밑면이 직사각형인 기둥인 직육면체에 대해서 최대 부피를 탐구해본 뒤, 밑면이 정다각형인 기둥에 대해서도 탐구하여 어떤 밑면이 어떤 도형일때 부피가 최대가 되는지 탐구한다.

겉넓이는 k 라는 상수로 고정한다.

3 직육면체의 최적화

직육면체(윗면 없음)의 가로, 세로, 높이를 각각 a , b , c 로 둔다. (이들은 모두 길이 이므로 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ 이다.) 그림 1은 해당 직육면체를 나타내며, 길이 비율은 실제 해와 무관하다.

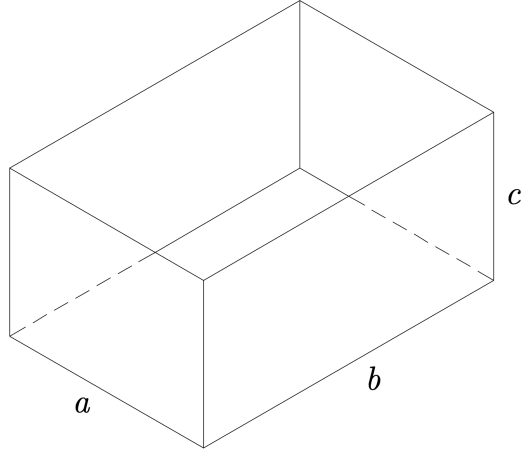


Figure 1: 윗면이 없는 직육면체

본 연구에서는 사용할 수 있는 필라멘트 양이 고정되어 있으므로(두께 무시), 컨테이너의 겉넓이를 상수 k 로 고정한다.

윗면이 없으므로 겉넓이는 바닥 ab 와 네 옆면 $2bc + 2ca$ 의 합이다:

$$S(a, b, c) = ab + 2bc + 2ca \quad (1)$$

따라서 제약조건은

$$S(a, b, c) = k \iff ab + 2c(a + b) = k \quad (2)$$

이다. 한편 부피는

$$V(a, b, c) = abc \quad (3)$$

이다.

3.1 제약조건을 이용한 변수 제거

밑면의 넓이를 p 라 두면 $p = ab$ 이다. 식 2는

$$p + 2c(a + b) = k \quad (4)$$

이 되며, 이를 c 에 대해 풀면

$$c = \frac{k - p}{2(a + b)} \quad (5)$$

이다. 따라서 부피는

$$V(a, b) = ab \cdot c = p \cdot \frac{k - p}{2(a + b)} \quad (6)$$

로 쓸 수 있다.

3.2 극댓값에서 $a = b$ 인 이유

이제 어떤 후보 (a, b, c) 가 부피를 최대로 만드는 최적해라고 가정하자. 그 후보에서의 밑면 넓이 $p = ab$ 는 어떤 특정한 값 p_0 를 갖는다. 이때 p 가 동일한 다른 직사각형들(즉 $ab = p_0$ 인 다른 (a, b))과 비교해도, 최적해라면 부피가 가장 커야 한다.

식 6에서 k 와 p 가 고정되면,

$$V(a, b) = p \cdot \frac{k - p}{2(a + b)}$$

이므로, V 를 크게 만들기 위해서는 분모의 $(a + b)$ 가 최소가 되어야 한다. 그런데 $ab = p$ 가 고정일때 산술기하 평균에 의해

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{p} \quad (7)$$

가 성립하고, 등호는 $a = b$ 일 때에만 성립한다. 따라서 $ab = p$ 인 후보들 중 $(a + b)$ 가 최소가 되는 경우는 $a = b$ 이며, 결국 최적해는 반드시

$$a = b \quad (8)$$

를 만족해야한다.

3.3 최대 부피와 a, b, c 의 비율

이제 b 를 a 로 두면, $p = ab = a^2$ 이고, 식 6을 정리하면 부피는

$$V(a) = p \cdot \frac{k - p}{2(a + b)} = \frac{ka - a^3}{4} \quad (9)$$

가 된다.

최댓값이 되는 지점에서 도함수의 값이 0이어야 하기에, $V'(a) = 0$ 을 풀면,

$$V'(a) = \frac{1}{4}(k - 3a^2) = 0 \implies a = \sqrt{\frac{k}{3}} \quad (10)$$

이 된다.

또한 $V''(a) = -\frac{6}{4}a$ 에서 $a > 0$ 이기 때문에 $V''(a) < 0$ 이 항상 성립한다. 따라서 그림 2에서도 볼 수 있듯이 $a < \sqrt{\frac{k}{3}}$ 일때는 $f'(a) > 0$ 임으로 $f(a)$ 가 증가하며,

$a > \sqrt{\frac{k}{3}}$ 일때는 $f'(a) < 0$ 임으로 $f(a)$ 가 감소하기 때문에, $a = \sqrt{\frac{k}{3}}$ 인 지점이 $f(a)$ 의 최댓값임을 알 수 있다.

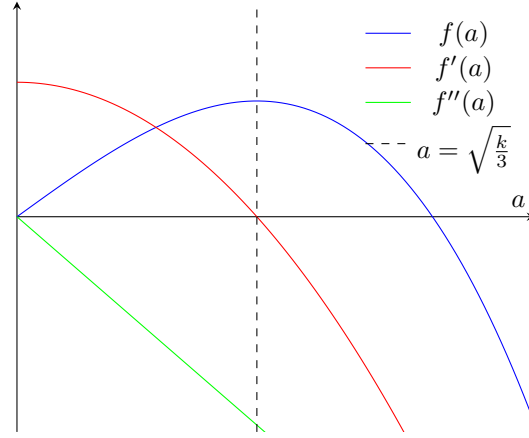


Figure 2: 함수 $f(a)$ 와 도함수 및 이계도함수 그래프

도출한 a 값을 식 5에 대입하면,

$$c = \frac{k-p}{2(a+b)} = \frac{k - \left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right)^2}{4\sqrt{\frac{k}{3}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{3}} = \frac{1}{2}a \quad (11)$$

이 된다. 따라서 최적 비율은

$$\boxed{a = b = 2c} \quad (12)$$

이다.

마지막으로 최대 부피는

$$V_{\max} = abc = a^2c = \left(\frac{k}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{3}}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{3}\right)^{3/2}. \quad (13)$$

이 된다.

3.4 해석 및 다음 단계

직육면체의 부피가 최대가 될때 $a = b$ 이므로 밑면은 정사각형이 된다. 이를 바탕으로 밑면이 정 n 각형인 기둥으로 확장하여, 변의 수 n 이 증가할수록 최대 부피가 어떻게 변하는지 분석한다.

4 정다각형 기둥의 최적화

정다각형 기둥(윗면 없음) 분석에서는 밑면의 한 변의 길이를 a , 기둥의 높이를 b 라 하고, 밑면의 변의 개수를 n 이라 한다. 이때, a 와 b 는 길이이므로 $a > 0$, $b > 0$ 이며, 밑면은 최소 삼각형이므로 $n \geq 3$ 이다. 그림 3은 해당 기둥을 나타내며, 길이 비율은 실제 해와 무관하다.

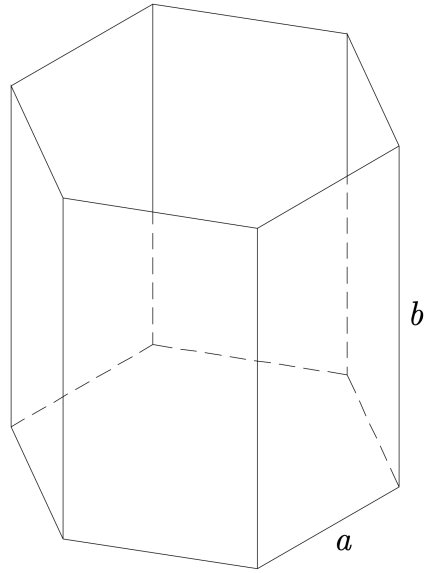


Figure 3: 윗면이 없는 정다각형 기둥

정다각형 기둥 분석에서도 벽의 두께는 무시하며, 길넓이는 상수 k 로 고정한다.

길넓이와 부피를 계산하기에 앞서 밑면의 넓이를 A 라 하자. 그림 4과 같이, 변의 개수가 n 개인 정다각형은 중심에서 각 꼭짓점으로 선을 그으면 n 개의 이등변삼각형으로 분할된다.

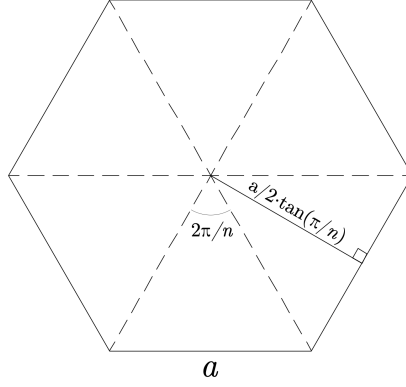


Figure 4: 정다각형 기둥 밑면

각 이등변삼각형의 꼭짓각은 $\frac{2\pi}{n}$ 이고, 밑변의 길이는 a 이다. 이때 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선은 이등변삼각형을 서로 합동인 두 직각삼각형으로 나눈다. 이 직각삼각형에서 삼각함수를 이용하면 높이는

$$\frac{a}{2 \tan(\pi/n)}$$

임을 구할 수 있다.

따라서 각 이등변삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2 \tan(\pi/n)} = \frac{a^2}{4 \tan(\pi/n)}$$

이다.

이러한 삼각형이 n 개 존재하므로, 밑면의 전체 넓이 A 는

$$A = \frac{na^2}{4 \tan(\pi/n)} \quad (14)$$

이 된다.

이때 계산의 편의를 위해

$$t = \frac{n}{4 \tan(\pi/n)} \quad (15)$$

로 두면, 위 식은 다음과 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$A = ta^2 \quad (16)$$

다음으로 밑면의 둘레를 P 라고 하자. P 는

$$P = na \quad (17)$$

로 나타낼 수 있다.

기둥의 겹넓이는 윗면이 없기 때문에 밑면의 넓이 A 와 옆면의 넓이 Pb 의 합이다.

$$S(a, b, n) = A + Pb \quad (18)$$

따라서 제약조건은

$$S(a, b, n) = k \iff A + Pb = k \quad (19)$$

이다. 한편 부피는

$$V(a, b, n) = Ab \quad (20)$$

이다.

4.1 제약조건을 이용한 변수 제거

식 19을 b 에 대해서 정리하면

$$b = \frac{k - A}{P} \quad (21)$$

가 된다. 이를 식 20에 대입하면 부피는

$$V(a, n) = Ab = A \cdot \frac{k - A}{P} = \frac{t(ka - ta^3)}{n} \quad (22)$$

이 된다.

본 문제는 원래 밑면의 변 길이 a , 변의 수 n , 높이 b 의 세 변수로 기술된다. 그러나 제약조건 $A + Pb = k$ 를 b 에 대해 풀어 $b = \frac{k-A}{P}$ 로 나타낸 뒤 이를 부피식에 대입했으므로, b 는 더 이상 독립적으로 선택되는 변수가 아니다. 결과적으로 부피는 식 22와 같이 (a, n) 에 의해 결정된다.

따라서 제약조건을 만족하면서 부피를 최대화하는 (a, n) 쌍을 찾아야 한다. 그러나 우선 고정된 n 에서 최대 부피가 되는 a 를 찾는 것부터 진행한다. 즉, n 을 3이상의 임의의 정수 n_0 라고 할 때, 먼저 $n = n_0$ 를 상수로 두고 a 에 대해 다음의 1변수 함수

$$V_{n_0}(a) := V(a, n_0)$$

를 최대화한다.

4.2 $n = n_0$ 에서의 a 에 대한 최적 조건

$n = n_0$ 를 고정하면 t 와 n_0 는 상수이며,

$$V_{n_0}(a) = \frac{t}{n_0} (ka - ta^3) \quad (23)$$

는 a 에 대한 미분 가능한 함수가 된다. $V_{n_0}(a)$ 가 최대가 되는 지점에서는 해당 함수의 도함수의 값이 0이 되어야 하기 때문에

$$V'_{n_0}(a) = 0 \quad (24)$$

이 성립해야 한다. 이를 계산하면,

$$V'_{n_0}(a) = \frac{t}{n_0} (k - 3ta^2) \quad (25)$$

이므로,

$$\frac{t}{n_0} (k - 3ta^2) = 0 \implies k - 3ta^2 = 0 \implies a = \sqrt{\frac{k}{3t}}. \quad (26)$$

를 도출할 수 있다.

또한 26에서 구한 a 가 $V_{n_0}(a)$ 가 최대가 되는 지점이 되기 위해서는 해당 함수의 이계도함수가 해당 지점에서 음수여야 한다.

$$V''_{n_0}(a) = \frac{t}{n_0} (-6ta) < 0 \quad (a > 0)$$

이므로 식 26에서 얻은 임계점은 실제로 최대 부피를 준다는 것을 알 수 있다. 따라서 정 n_0 각기둥에서 최대 부피를 만들기 위한 변의 길이는

$$a = \sqrt{\frac{k}{3t}} \quad (27)$$

로 결정된다.

4.3 최적 조건에서의 A와 b

식 16에 계산한 a 값을 대입하면,

$$A = ta^2 = \frac{k}{3} \quad (28)$$

이 된다. A 가 k 로만 나타내어진다는 것은 n 의 값에 상관없이 정다각형 기둥의 부피가 최대가 될때, 밑면의 넓이는 일정하다는 것을 의미한다. 이는 위에서 직육면체의 부피가 최대가 되는 경우에서도 두 밑면의 길이가 모두 $\sqrt{\frac{k}{3}}$ 가 되어, 밑면의 넓이가 $\frac{k}{3}$ 이 되었기 때문에 이 결과를 만족한다고 할 수 있다.

기둥의 높이는 식 21에 구한 A 값을 대입하면,

$$b = \frac{k - A}{P} = \frac{2k}{3P} \quad (29)$$

가 된다.

4.4 최적 조건에서의 부피

기둥의 부피는 A 와 b 의 곱이기에, 최대 부피는

$$V_{max} = Ab = \frac{2k^2}{9P} \quad (30)$$

가 된다.

여기서 k 는 고정된 양수이며, $P > 0$ 이다. 따라서 V_{max} 는 P 에 대하여

$$V_{max}(P) = \frac{C}{P} \quad (C = \frac{2k^2}{9} > 0) \quad (31)$$

와 같은 형태를 가진다.

함수 $V_{max}(P)$ 는 $P > 0$ 에서 단조 감소 함수이므로, P 가 작아질수록 V_{max} 는 증가한다. 따라서 최대 부피를 얻기 위해서는 P 가 최소가 되어야 한다.

P 는 식 17에 a 값을 대입하면

$$P(n) = na = n\sqrt{\frac{k}{3t}} = 2\sqrt{\frac{kn \tan(\pi/n)}{3}} \quad (32)$$

이 된다. 이때 식 27에서 a 를 n 으로 나타내었기 때문에, P 는 n 에 대한 일변수 함수가 된다.

$P(n)$ 이 최소가 되기 위해서는 $n \tan(\pi/n)$ 이 최소가 되어야 한다.

$$Q(n) = n \tan(\pi/n) \quad (n \geq 3) \quad (33)$$

라고 하면, $Q(n)$ 이 최소가 될때의 n 이 기둥의 부피를 최대화 한다. 여기서 n 은 정수 각형의 변의 개수를 의미하므로 본래 정수 $n \geq 3$ 에 한정된다. 그러나 함수 $Q(n)$ 의 증가 및 감소를 분석하기 위하여, n 을 실수 $n > 2$ 로 확장하여 미분을 수행한다. 이러한 연속적 확장은 함수의 경향성을 파악하기 위한 것이며, 이후 해석은 다시 정수 n 에 대해 이루어진다.

$Q(n)$ 이 최소가 될 수 있는 후보 지점은 극값과 경계값이 있다.

먼저 극값이 최솟값이 되기 위해서는 해당 지점에서 도함수가 0이어야 하며, 이계도함수가 양수여야 한다. $Q(n)$ 의 도함수는 곱의 미분법에 따라

$$Q'(n) = \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) - \frac{\pi}{n} \sec^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (34)$$

가 된다. 이때 계산을 간단히 하기 위하여

$$\theta = \frac{\pi}{n} \quad (35)$$

이라 두면,

$$Q'(n) = \tan \theta - \theta \sec^2 \theta \quad (36)$$

로 표현할 수 있기에,

$$\tan \theta - \theta \sec^2 \theta = 0 \implies \sin \theta \cos \theta = \theta \quad (37)$$

배각공식에 따르면

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta \implies \sin \theta \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2} \quad (38)$$

가 성립한다.

따라서 극값이 존재하기 위해서는

$$\theta = \frac{\sin 2\theta}{2} \quad (39)$$

를 만족해야 한다. 이를 분석하기 위하여 다음과 같은 함수를 정의한다.

$$f(\theta) = \frac{\sin 2\theta}{2} - \theta \quad (\theta \leq \frac{\pi}{3}) \quad (40)$$

그러면 위 방정식은 $f(\theta) = 0$ 을 푸는 문제와 같다. 이 함수의 도함수는

$$f'(\theta) = \cos 2\theta - 1 \quad (41)$$

이다. 삼각함수의 성질에 의해 $\cos 2\theta \leq 1$ 이며, $\theta > 0$ 일 때는 $\cos 2\theta < 1$ 이므로

$$f'(\theta) < 0 \quad (\theta > 0) \quad (42)$$

가 성립한다. 따라서 $f(\theta)$ 는 $\theta > 0$ 에서 단조 감소한다. 또한

$$f(0) = 0 \quad (43)$$

이므로, $f(\theta) = 0$ 을 만족하는 해는 $\theta = 0$ 하나뿐이다. 그러나 $\theta = \frac{\pi}{n}$ 의 정의에 의해 $\theta = 0$ 이 되려면 $n \rightarrow \infty$ 이어야 하며, 유한한 n 에서는 $\theta > 0$ 이다. 따라서 $Q(n)$ 은 유한한 n 에서 내부 극값을 갖지 않는다.

내부에서 극값이 존재하지 않으므로, 최솟값은 경계에서만 발생할 수 있다. 본래 문제에서 n 은 정 n 각형의 변의 개수를 의미하므로 정수 $n \geq 3$ 에 한정된다. 따라서 $Q(n)$ 의 정의역은

$$\{n \mid n \geq 3, n \in \mathbb{Z}\} \quad (44)$$

이다.

이 정의역에서 가장 작은 값은 $n = 3$ 이므로, 좌측 경계값은

$$Q(3) \simeq 5.196 \quad (45)$$

이다.

우측 경계값을 구하기 위해서는 극한을 사용한다. 이 경우 무한대로의 극한값을 구하는 것보다 0으로의 극한값을 구하는게 더 쉽기 때문에

$$u = \frac{1}{n} \quad (46)$$

으로 정의하면,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = \lim_{u \rightarrow 0} Q(u) \quad (47)$$

이 된다. 이를 계산하면

$$\lim_{u \rightarrow 0} Q(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \tan \pi u = \pi \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi u)}{\pi u} = \pi \cdot 1 = \pi \quad (48)$$

이 된다. $\lim_{u \rightarrow 0} Q(u) < Q(3)$ 이기 때문에 $Q(u)$ 의 최솟값은 n 이 무한대일때임을 알 수 있다. 이는 밑면의 변이 더 많을수록 기둥의 부피가 더 커짐을 의미한다.

정다각형에서 변의 대수가 끊임없이 늘어나면 원이 되기 때문에 부피가 최대가 되는 밑면은 원이 되며, 이는 원기둥이 된다. 따라서 이번에는 제약조건하에서 가장 부피가 큰 원기둥에 대해서 탐구한다.

5 원기둥의 최적화

원기둥 기둥(윗면 없음) 분석에서는 밑면 원의 반지름을 a , 기둥의 높이를 b 라 한다. 이때, a 와 b 는 길이이므로 $a > 0$, $b > 0$ 이다. 그림 5은 해당 기둥을 나타내며, 길이 비율은 실제 해와 무관하다.

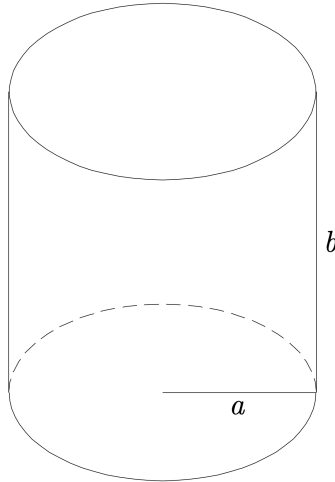


Figure 5: 윗면이 없는 원기둥

윗면이 없으므로 겉넓이는 밑면과 옆면의 합이다

$$S(a, b) = \pi a^2 + 2\pi ab \quad (49)$$

겉넓이는 k 로 고정되어 있기 때문에 제약조건은

$$S(a, b) = k \iff \pi a^2 + 2\pi ab = k \quad (50)$$

이다. 부피는

$$V(a, b) = \pi a^2 b \quad (51)$$

이다.

식 50를 b 에 대해 정리하면

$$b = \frac{k - \pi a^2}{2\pi a} \quad (52)$$

가 된다. 이를 이용해 식 51에 대입하면 부피는

$$V(a) = \frac{ak - \pi a^3}{2} \quad (53)$$

이 된다.

부피가 최대가 되기 위해서는 $V(a)$ 의 도함수가 0이 되며, 이제도함수가 음수인 지점이어야 한다. 도함수는

$$V'(a) = \frac{k - 3\pi a^2}{2} \quad (54)$$

이기에,

$$V'(a) = 0 \iff \frac{k - 3\pi a^2}{2} = 0 \iff a = \sqrt{\frac{k}{3\pi}} \quad (55)$$

이다. 또한,

$$V''(a) = -3\pi a \quad (56)$$

로 $a > 0$ 이기에 $V''(a) < 0$ 이 항상 성립하기에 $a = \sqrt{\frac{k}{3\pi}}$ 이 $V(a)$ 의 최댓값임을 알 수 있다.

이때의 b 는 식 52에 구한 a 값을 대입하면,

$$b = \frac{k - \pi a^2}{2\pi a} = \frac{k - \pi \frac{k}{3\pi}}{2\pi \sqrt{\frac{k}{3\pi}}} = \sqrt{\frac{k}{3\pi}} \quad (57)$$

가 된다. 따라서 최적 비율은

$$\boxed{a = b} \quad (58)$$

이다.

최대 부피는

$$V_{max} = \pi a^2 b = \pi a^3 = \pi \left(\frac{k}{3\pi} \right)^{3/2} \quad (59)$$

이다.

6 n 에 따른 변화

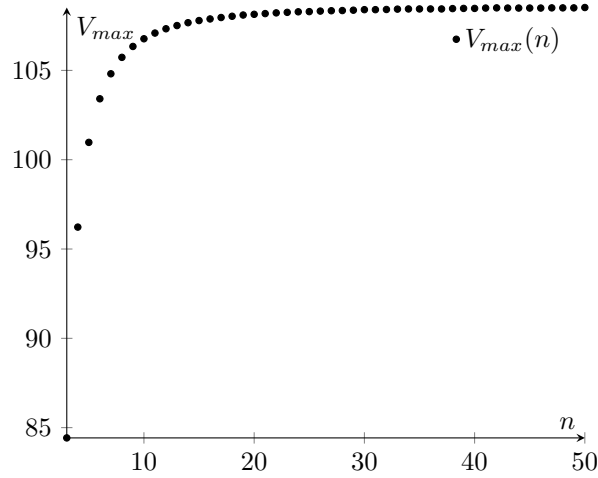


Figure 6: 함수 $V_{\max}(n)$

그림 6은 정 n 각형 기둥에서 최대 부피 $V_{\max}(n)$ 이 변의 개수 n 에 따라 어떻게 변화하는지를 나타낸 것이다. 이때 k 는 일정한 값으로 고정되어 있으며, 각 n 에 대해 앞서 도출한 최적 조건을 적용하여 계산한 값이다.

그래프를 통해 다음과 같은 특징을 관찰할 수 있다.

- n 이 증가할수록 $V_{\max}(n)$ 은 단조 증가한다.
- 증가량은 점점 감소하며, 특정 값에 점근적으로 수렴하는 형태를 보인다.

이러한 경향은 앞서 유도한 식을 통해 이론적으로도 설명할 수 있다. 최대 부피는

$$V_{\max}(n) = \frac{2k^2}{9P(n)} \quad (60)$$

이며, 둘레는

$$P(n) = 2\sqrt{\frac{kn \tan(\pi/n)}{3}} \quad (61)$$

이므로,

$$V_{\max}(n) = \frac{2k^2}{9 \cdot 2\sqrt{\frac{kn \tan(\pi/n)}{3}}} = \frac{k^{3/2}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n \tan(\pi/n)}} \quad (62)$$

로 나타낼 수 있다.

따라서 $V_{\max}(n)$ 의 증감은 함수

$$Q(n) = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (63)$$

의 변화에 의해 결정된다.

앞서 $Q(n)$ 이 n 이 증가함에 따라 감소하며,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = \pi \quad (64)$$

임을 보였다. 따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{\max}(n) = \frac{k^{3/2}}{3\sqrt{3}\pi} \quad (65)$$

가 된다.

이 값은 이후 원기둥의 최대 부피로 도출된 값과 정확히 일치한다.

또한 n 이 증가할수록 증가폭이 점점 작아지는 이유는 $\tan(\pi/n)$ 이 n 이 커질수록 $\frac{\pi}{n}$ 에 가까워지기 때문이다. 즉,

$$\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \approx \frac{\pi}{n} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (66)$$

이므로,

$$Q(n) \approx \pi \quad (67)$$

로 빠르게 수렴하게 되고, 이에 따라 $V_{\max}(n)$ 역시 일정 값에 점점 가까워지게 된다.

기하학적으로 해석하면, 정다각형은 변의 개수가 증가할수록 원에 가까워지며, 같은 넓이를 가질 때 둘레가 점점 감소한다. 이로 인해 동일한 겉넓이 조건에서 더 많은 면적을 밑면에 할당할 수 있게 되고, 결과적으로 부피가 증가하게 된다.

그러나 n 이 충분히 커진 이후에는 정다각형과 원 사이의 차이가 매우 작아지기 때문에, 부피 증가 역시 거의 발생하지 않는다. 이는 그래프에서 증가가 점점 완만해지는 형태로 나타난다.

따라서 정 n 각형 기둥의 최대 부피는 n 이 증가함에 따라 단조 증가하며, 그 극한은 원기둥의 최대 부피와 일치한다.

7 결론

본 연구는 고정된 겉넓이 k 를 가지는 윗면이 없는 기둥 중에서 최대 부피를 가지는 도형을 탐구하였다. 이는 3D 프린터로 제한된 필라멘트 양을 사용할 때 가장 효율적인 컨테이너 형태를 찾는 문제로부터 출발하였다.

먼저 밑면이 직사각형인 직육면체의 경우를 분석하였다. 겉넓이 $S = ab + 2ac + 2bc = k$ 의 제약조건 하에서 부피 $V = abc$ 를 최대화한 결과,

$$a = b = 2c$$

일 때 최대 부피가 됨을 도출하였다. 즉, 밑면은 정사각형이 되며, 높이는 밑변 길이의 절반이 된다. 또한 이때 밑면의 넓이는 항상

$$A = \frac{k}{3}$$

이 됨을 확인하였다.

이를 일반화하여 밑면이 정 n 각형인 기둥을 분석하였다. 제약조건을 이용하여 높이를 소거하고 부피를 (a, n) 의 함수로 표현한 뒤, 고정된 n 에서 최대가 되는 a 를 구하였다. 그 결과,

$$a = \sqrt{\frac{k}{3n}}$$

이며, 이때 역시 밑면의 넓이는

$$A = \frac{k}{3}$$

이 됨을 확인하였다. 이는 밑면의 형태와 무관하게 최대 부피를 가지는 경우에는 전체 겉넓이의 $\frac{1}{3}$ 이 밑면에, $\frac{2}{3}$ 이 옆면에 배분된다는 것을 의미한다.

다음으로 부피 최대화를 위해서는 둘레 P 가 최소가 되어야 함을 보였고, 이를 위해 함수

$$Q(n) = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

을 분석하였다. 내부 극값이 존재하지 않음을 증명하고, 경계 분석을 통해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = \pi$$

임을 도출하였다. 이는 변의 개수가 증가할수록 둘레가 감소하며, 그 극한이 원의 경우와 일치함을 의미한다.

따라서 고정된 겉넓이 조건 하에서 최대 부피를 가지는 도형은 밑면이 원인 원기둥임을 알 수 있다. 이는 정다각형이 변의 개수를 무한히 늘릴 때 원이 된다는 기하학적 사실과도 일치한다.

본 연구를 통해 도출된 가장 중요한 통찰은 다음과 같다.

- 최대 부피가 되는 경우, 밑면 넓이는 항상 $\frac{k}{3}$ 이다.
- 최대 부피는 옆면 둘레가 최소가 되는 도형에서 발생한다.
- 정다각형은 변의 수가 증가할수록 원에 수렴하며, 원기둥이 최적 구조가 된다.

이 결과는 기하학적 대칭성이 최적화를 유도한다는 일반적인 원리와의 연결된다. 대칭성이 높아질수록 동일한 겉넓이로 더 큰 내부 공간을 확보할 수 있다.

다만 본 연구에서는 벽 두께를 무시하고 겉넓이와 필라멘트 사용량이 완전히 비례한다고 가정하였다. 실제 3D 프린팅에서는 재료의 밀도, 적층 구조, 내부 채움률 (infill) 등의 요소가 영향을 줄 수 있다. 향후 연구에서는 이러한 현실적 요소를 포함하여 보다 실제적인 모델로 확장할 수 있을 것이다.

결론적으로, 고정된 겉넓이를 가지는 윗면이 없는 기둥 중 최대 부피를 가지는 도형은 원기둥이며, 이는 대칭성과 둘레 최소화의 원리에 의해 설명된다.